Curso Primero - Ingeniería en Informática

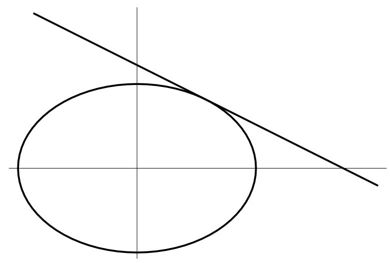
Análisis Matemático

Soluciones de los ejercicios propuestos en la prueba del día 22/12/2004

Ejercicio 1. Determinar un punto (u,v) $(u>0, v>0)$ de la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

tal que la tangente a la elipse en dicho punto determine con los ejes un segmento de longitud mínima.



Solución. Consideraremos la función $f(x)=\frac{4}{5}\sqrt{25-x^2}$, $0<x<5$ cuya gráfica es la parte superior de la elipse. La tangente en un punto (u,v) viene dada por

$$y-v=f'(u)(x-u)=-\frac{4}{5}\frac{u}{\sqrt{25-u^2}}(x-u)$$

Haciendo $x=0$ e $y=0$ obtenemos los puntos de corte con los ejes $(0,y_0)$, $(x_0,0)$ que vienen dados por

$$y_0 = v+\frac{4}{5}\frac{u^2}{\sqrt{25-u^2}} \tag{1}$$

$$x_0 = \left(v+\frac{4}{5}\frac{u^2}{\sqrt{25-u^2}}\right)\frac{5}{4}\frac{\sqrt{25-u^2}}{u} \tag{2}$$

Simplificamos las expresiones obtenidas teniendo en cuenta que

$$\frac{u^2}{25}+\frac{v^2}{16}=1 \Longrightarrow \begin{cases} \sqrt{25-u^2}=\frac{5}{4}v \\ u=\frac{5}{4}\sqrt{16-v^2} \end{cases}$$

Sustituyendo en (1) y (2) resulta fácilmente:

$$y_0=\frac{16}{v}, \qquad x_0=\frac{20}{\sqrt{16-v^2}}$$

Por tanto la función de la que debemos calcular su mínimo absoluto es

$$\sqrt{\frac{(16)^2}{v^2}+\frac{(20)^2}{16-v^2}}=4\sqrt{\frac{16}{v^2}+\frac{25}{16-v^2}} \tag{3}$$

Como la raíz cuadrada conserva el orden en los reales positivos, el mínimo absoluto de dicha función se alcanza en el mismo punto que el mínimo absoluto de la función

$$h(v) = \frac{16}{v^2} + \frac{25}{16 - v^2}$$

función que está definida para $0 < v < 4$. Calculamos los puntos donde se anula su derivada

$$h'(v) = -\frac{32}{v^3} + \frac{50v}{(16-v^2)^2} = 2\left(\frac{-16(16-v^2)^2 + 25v^4}{v^3(16-v^2)^2}\right) = 2\left(\frac{9v^4 + 2(16)^2 v - (16)^3}{v^3(16-v^2)^2}\right)$$

Por tanto los ceros de la derivada vienen dados por

$$9v^4 + 2(16)^2 v - (16)^3 = 0 \Longrightarrow v^2 = \frac{-2(16)^2 + \sqrt{4(16)^4 + 36(16)^3}}{18} = \frac{64}{9} \Longrightarrow v = \frac{8}{3}$$

Donde hemos elegido la solución positiva. La solución obtenida está en el intervalo $]0,4[$ y es el único punto de dicho intervalo donde se anula h'. Deducimos que h' tiene signo constante en los intervalos $]0,\frac{8}{3}[$ y $]\frac{8}{3},4[$ (porque es continua en ellos y no se anula). Como, evidentemente

$$\lim_{\substack{v\to 0\\ v>0}} h'(v) = -\infty \qquad \lim_{\substack{v\to 4\\ v<4}} h'(v) = +\infty$$

concluimos que:

$$\begin{array}{lclcl} 0 < t < \frac{8}{3} & \Longrightarrow & h'(v) < 0 & \Longrightarrow & h \text{ es decreciente en }]0,\frac{8}{3}[\\ \frac{8}{3} < v < 4 & \Longrightarrow & h'(v) > 0 & \Longrightarrow & h \text{ es creciente en }]\frac{8}{3},4[\end{array}$$

Concluimos así que h alcanza un mínimo absoluto en $v = \frac{8}{3}$. Por tanto la longitud mínima del segmento determinado por la tangente a la elipse y los ejes coordenados se obtiene haciendo en (3) $v = \frac{8}{3}$ resultando ser igual a 9.

Ejercicio 2. Calcular la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x$.

Solución. Por definición

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x$$

Para calcular la integral

$$\int_1^{t} \frac{1}{x(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x \qquad (t > 1)$$

usaremos la regla de Barrow. Calculemos una primitiva de la función

$$\frac{1}{x(x^2+x+1)}$$

se trata de una función racional. Como el polinomio x^2+x+1 no tiene raíces reales, la descomposición en fracciones simples es de la forma

$$\frac{1}{x(x^2+x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

Multiplicando e identificando numeradores

$$1 = A(x^2+x+1) + (Bx+C)x$$

Haciendo $x=0$ obtenemos $A=1$. Igualando coeficientes de x^2 se tiene $A+B=0$, por lo que $B=-1$. Igualando coeficientes de x se tiene $A+C=0$, luego $C=-1$.

$$\begin{aligned}
\int_1^t \frac{1}{x(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x &= \int_1^t \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - \int_1^t \frac{x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \log(t) - \frac{1}{2}\int_1^t \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_1^t \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \log(t) - \frac{1}{2}\log(t^2+t+1) + \frac{1}{2}\log 3 - \frac{1}{2}\int_1^t \frac{1}{(x+1/2)^2+3/4}\,\mathrm{d}x \\
&= \log\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+t+1}}\right) + \frac{\log 3}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\int_1^t \frac{2/\sqrt{3}}{\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \log\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+t+1}}\right) + \frac{\log 3}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3} \\
&= \frac{\log 3}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{3} + \log\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+t+1}}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)
\end{aligned}$$

Como

$$\lim_{t\to+\infty}\log\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+t+1}}\right) = 0 \qquad \lim_{t\to+\infty}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{2}$$

concluimos que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x = \frac{\log 3}{2} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{\pi}{2\sqrt{3}} = \frac{\log 3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{18}\pi$$

Observaciones, comentarios, reflexiones

Los dos ejercicios propuestos son, cada uno en su estilo, lo más fácil que se puede poner.

El primer ejercicio se parece mucho a uno hecho en clase en el que se pedía un punto de la elipse por la condición de que el triángulo determinado por la tangente en dicho punto y los ejes coordenados tuviera área mínima.

Nadie ha hecho bien el primer ejercicio. Con alguna excepción nadie ha llegado a plantearlo correctamente.

Nadie ha hecho bien el segundo ejercicio. Nadie ha calculado bien la primitiva de la función.

Los fallos más notables son:

- No sabéis calcular la tangente a la gráfica de una función.
- Algunos intentáis calcular los puntos de corte sin calcular antes la recta tangente.
- Algunos se equivocan por elegir muy mala notación confundiendo variables.
- Muchísimos fallos de cálculo. Disparates increíbles (se los enseñaré a quien quiera verlos) como los siguientes:
  - $\frac{x}{y} = \frac{x-1/4}{y+1/4}$
  - $\sqrt{a^2-b^2} = a-b$
  - Decir que la ecuación de la elipse es de la forma $y = \frac{x-a}{b}$
  - $\log(2x) = 2\log x$
  - $(x+1)^2 = x^2+x+1$
  - $\frac{t}{t^2+t+1} = \frac{1}{t+2}$
  - $\frac{1}{x(x^2+x+1)} = \frac{1}{x}$
  - $\int \frac{1}{x(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$
- No sabéis completar un cuadrado. Con una sola excepción nadie ha hecho bien la siguiente (al parecer difícil) operación $x^2+x+1 = (x+1/2)^2+3/4$.
- No sabéis integrar una fracción simple cuando la raíz es imaginaria.
- Algunos os equivocáis al derivar una raíz cuadrada.